УДК 519.854.001.26+303.092.5

Александр Васильевич Ляхов,
канд. техн. наук, доц.,
Даниил Сергеевич Шмидт
Донецкий национальный
технический университет

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ МЕТОДА ДИНАМИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ ПРИ РЕШЕНИИ ДИСКРЕТНЫХ ТЕХНИКО-ЭКОНОМИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

С целью минимизации затрат, связанных с процессами, реализуемыми во времени и в пространстве, возможно использовать метод динамического программирования. Этот метод позволяет оптимизировать распределение ограниченного ресурса по этапам, если весь процесс можно четко разделить на последовательно расположенные места потребления данного ресурса.

В общем виде нужно найти такое управление U, при котором затраты З обращаются в минимум

$$З = \min\{З(U)\}. \quad (1)$$

Задача решается в два захода – прямом и обратном. При первом заходе оптимизация производится методом последовательного приближения от первого шага (этапа) процесса к последнему, а затем, наоборот, от последнего к первому. При первом заходе, идя от предыдущих шагов к последующим, находят условно оптимальное управление. При втором заходе оптимизация начинается от последнего шага, для которого оптимальное управление известно, последовательно переходя от условных к оптимальным управлениям.

При решении поставленной задачи оптимального распределения ресурсов по шагам (этапам), если нет соответствующих зависимостей, детерминированно на каждом этапе производятся расчеты – для каждого варианта необходимо знать затраты (в денежном выражении), вызванные потреблением ресурса. После каждого этапа ресурс перераспределяется в зависимости от финансовых затрат и заранее назначенных технических или иных вариантов использования ресурса. Задача решается в таких условиях: распределяемые ресурсы ограничены, финансовые затраты условно неограничены.

Схематически рассматриваемый процесс можно упрощенно представить следующим образом:

1-й этап 2-й этап 3-й этап → *n*-й этап →

Рассмотрим прямой ход.

1-й этап. Из возможных вариантов потребления ресурса выбираются те, которые удовлетворяют всем технологическим требованиям (условиям, ограничениям). Как правило, увеличение количества вариантов только усложняет процесс решения задачи. Но если мы не укладываемся в заранее разработанные ряды вариантов потребления распределяемого ресурса по этапам, некоторые ряды на отдельных этапах могут быть расширены при условии соблюдения заранее оговоренных требований.

Итак, на первом этапе запишем ограниченный ряд технических или организационных параметров (значений) и для них рассчитаем затраты и потребляемые ресурсы

$$В:\ 1^1, 2^2, 3^3, \ldots n^1;$$

$$З:\ З_1^1, З_2^1, З_3^1, \ldots З_n^1;$$

$$Р:\ Р_1^1, Р_2^1, Р_3^1, \ldots Р_n^1,$$

где В – варианты параметров – порядковые номера ;

З – затраты, связанные с реализацией технического (организационного) мероприятия соответствующего параметра, грн.

Р – ресурс, необходимый для реализации мероприятия, соответствующего параметра, ед. измерения.

2-й этап. Он технологически (организационно) отличается от первого. Составляются и рассчитываются следующие исходные данные:

$$1^2, 2^2, 3^2, \dots n^2;$$

$$З_1^2, З_2^2, З_3^2, \dots З_n^2;$$

$$Р_1^2, Р_2^2, Р_3^2, \dots Р_n^2;$$

$$З_1^{1,2}, З_2^{1,2}, З_3^{1,2}, \dots З_n^{1,2};$$

$$Р_1^{1,2}, Р_2^{1,2}, Р_3^{1,2}, \dots Р_n^{1,2},$$

где $З^{1,2}$ – суммарные затраты на 1-м и 2-м этапах, грн.;

$Р^{1,2}$ – суммарные потребленные ресурсы на 1-м и 2-м этапах, ед. измерения.

Суммарным затратам $З^{1,2}$, соответствующим ресурсам $Р^{1,2}$, для двух этапов, – найдем условные оптимальные значения, используя данные (табл. 1 и 2).

Таблица 1

Суммарные затраты на первых двух этапах

$Р^{1,2}$	$З_1^{1,2}$	$З_2^{1,2}$	$З_3^{1,2}$	...	$З_n^{1,2}$
$Р_1^{1,2}$					
$Р_2^{1,2}$					
$Р_3^{1,2}$					
.					
$Р_n^{1,2}$					
$Р^{1,2}$	$Р_1^2$	$Р_2^2$	$Р_3^2$	...	$Р_n^2$

На втором этапе, как это было и на первом, назначаются несколько значений технического (организационного) параметра, для них рассчитываются затраты и ресурсы.

В табл. 1 в нижней строке записаны значения ресурса ($Р^2$) на втором этапе при различных параметрах. В левом крайнем столбце ($Р^{1,2}$) представлены сверху - вниз, по уменьшению, суммарные ресурсы для двух этапов процесса. В клетках таблицы на пересечении столбцов и строк располагаем затраты для двух этапов. Первое слагаемое из них – это затраты для второго этапа, оно соответствует значениям ресурса нижней строки. Второе слагаемое – затраты, связанные с использованием ресурса на первом этапе. Определяются они следующим образом. Из суммарного значения ресурса $Р_1^{1,2}$**,** записанного внизу в левом нижнем столбце, вычтем ресурс нижней строки $Р_1^2$, получим разность $(Р_n^{1,2} - Р_1^2)$, с которой войдем в ряд значений ресурса на первом этапе и соответственно введенному ресурсу получим затраты, например, $З_n^1$. Сложим затраты $З_n^2 + З_n^1 = З_n^{1,2}$ и запишем в табл. 1 на пересечении строки $Р_n^{1,2}$ и столбца $З_{1,2}^1$. Таким образом, заполним всю табл. 1. Опыт показал, что минимальные суммарные затраты расположены по диагонали этой таблицы.

Таблица 2

Условно оптимальные затраты на двух этапах

$Р^2$	$Р_1^2$	$Р_2^2$	$Р_3^2$	...	$Р_n^2$
$З^{1,2}$	$З_1^{1,2}$	$З_2^{1,2}$	$З_3^{1,2}$	...	$З_n^{1,2}$
$Р^{1,2}$	$Р_1^{1,2}$	$Р_2^{1,2}$	$Р_3^{1,2}$	...	$Р_n^{1,2}$

Табл. 2 заполняется так. В нижней строке записываются суммарные ресурсы для двух этапов в возрастающем порядке ; в средней – условно оптимальные затраты тоже для двух этапов. Для этого из табл.1 по столбцам, последовательно, слева – направо, выбираются суммарные затраты на двух этапах и минимальные – заносятся в табл.2.

Следует отметить, что при формировании табл.1 не всегда удается попасть в узлы сетки предыдущих этапов, полученной в результате условной оптимизации. Для получения промежуточных значений следует воспользоваться интерполяционной формулой

$$\frac{Р_i - Р^1}{Р_i - Р_{i+1}(З_i - З_{i+1}) + З_{i+1}},$$

где $Р_{i+1}, З_{i+1}$ – суммарные ресурсы и суммарные затраты для всех этапов (без последнего) в *i-м* узле сетки;

$Р_i, З_i$ – суммарные ресурсы и суммарные затраты для всех этапов (без последнего) в *i-м* узле сетки;

$Н_1$ – суммарные ресурсы для всех этапов в промежуточной точке между *i*+1 и *i*-м узлами сетки.

3-й этап. Расчеты выполняются аналогично описанным на втором этапе.

Подбираем и рассчитываем исходные данные

$$1^3, 2^3, 3^3, \dots n^3;$$
$$З_1^3, З_2^3, З_3^3, \dots З_n^3;$$
$$Р_1^3, Р_2^3, Р_3^3, \dots Р_n^3;$$
$$З_1^{1,2,3}, З_2^{1,2,3}, З_3^{1,2,3}, \dots З_n^{1,2,3};$$
$$Р_1^{1,2,3}, Р_2^{1,2,3}, Р_3^{1,2,3}, \dots Р_n^{1,2,3}.$$

Заполняются табл. 3 и 4.

Таблица 3

Суммарные затраты на трех этапах

$Р^{1,2,3}$	$З_1^{1,2,3}$	$З_2^{1,2,3}$	$З_3^{1,2,3}$	...	$З_n^{1,2,3}$
$Р_1^{1,2,3}$					
$Р_2^{1,2,3}$					
$Р_3^{1,2,3}$					
...					
$Р_n^{1,2,3}$					
$Р^3$	$Р_1^3$	$Р_2^3$	$Р_3^3$	...	$Р_n^3$

Таблица 4

Условно оптимальные затраты на трёх этапах

$Р^3$	$Р_1^3$	$Р_2^3$	$Р_3^3$	...	$Р_n^3$
$З^{1,2,3}$	$З_1^{1,2,3}$	$З_2^{1,2,3}$	$З_3^{1,2,3}$	...	$З_n^{1,2,3}$
$Р^{1,2,3}$	$Р_1^{1,2,3}$	$Р_2^{1,2,3}$	$Р_3^{1,2,3}$	...	$Р_n^{1,2,3}$

Надо иметь в виду, что в табл.4 суммарные затраты $(З^{1,2,3})$ должны быть условно минимальные для трех этапов.

Дальнейшие расчеты для оставшихся этапов производятся аналогично, кроме последнего.

Расчеты на последнем этапе в отличие от предыдущих имеют такую особенность, что здесь нужно получить оптимальные суммарные затраты при ограниченных в целом ресурсах для всех этапов.

В начале запишем исходные данные, соответствующие последнему этапу (m).

$$1^m,\ 2^m,\ 3^m,\ ...,\ n^m;$$

$$З_1^m,\ З_2^m,\ З_3^m,\ ...,\ З_n^m;$$

$$\text{P}_1^m,\ \text{P}_2^m,\ \text{P}_3^m,\ ...,\ \text{P}_n^m.$$

Затем из фиксированной величины ресурсов (Р) вычтем ресурсы первого параметра на последнем этапе (P_1^m) и с этой разностью войдем в итоговую таблицу предпоследнего этапа (*m*-1) и в соответствии с величиной ($\text{P}-\text{P}_1^m$) найдем суммарные затраты для всех этапов без последнего ; к этим затратам прибавим затраты на последнем этапе ($З_1^m$) , получим оптимальные затраты реализации процесса целиком.

В конкретных задачах, кроме оптимальных затрат, необходимо знать параметры на этапах, при которых эти затраты получены, т.е. необходимо решить обратную задачу. Для того, чтобы определить параметр на предыдущем этапе, нужно из фиксированной величины общих ресурсов вычесть ресурсы последнего этапа ($\text{P}-\text{P}_1^m$) и с этой разностью войти в сетку суммарных ресурсов на предпоследнем этапе и найти соответствующий параметр процесса на предпоследнем этапе. Далее, из ($\text{P}-\text{P}_1^m$) вычесть ресурс (P^{m-1}), соответствующий найденному параметру на предпоследнем этапе и с этим ресурсом ($\text{P}-\text{P}_1^m-\text{P}^{m-1}$) войти в следующую сетку суммарных ресурсов на третьем этапе, начиная с конца процесса, и в соответствии с величиной этого ресурса найти параметр на указанном этапе. Такая процедура поиска параметров на оставшихся этапах выполняется аналогично. На последнем этапе при обратном ходе с оставшимися ресурсами входим в сетку первого этапа и находим соответствующий параметр. В результате получим искомые параметры при минимальных затратах.

Необходимо проверить решение задачи. Для этого затраты, соответствующие найденным параметрам, следует сложить и должны получиться оптимальные суммарные затраты для всего процесса с допустимым отклонением от оптимальных.

Описанный алгоритм поиска оптимального решения не трудно переложить на компьютерную программу.

Литература

1. Беллман Я. Прикладные задачи динамического программирования / Я. Беллман, С. Дрейфус. – М.: Наука, 1965.
2. Вентцель Е.С. Элементы динамического программирования / Е.С. Вентцель. – М.: Наука, 1964.
3. Иванов Н.И. Использование метода динамического программирования при решении вопросов вскрытия и подготовки шахтных полей / Н.И. Иванов, А.В. Ляхов // Уголь Украины. – 1968.

Представлена в редакцию 10.11.2011 г.